

Olimpiada de matematică  
Etapă locală - 16 februarie 2013

## Clasa a IX-a

1. a) Demonstrați că  $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  
b) Determinați șirurile  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  având termenii strict pozitivi cu proprietatea  $\frac{a_1 + 2a_2 + \dots + na_n}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} = \frac{2n+1}{3}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
2. a) Demonstrați că  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ , pentru orice  $x, y, z \in \mathbb{R}$ ;  
b) Să se arate că  $x^2 + y^2 + z^2 + t(xy + yz + zx) \geq 0$ , oricare ar fi  $x, y, z \in \mathbb{R}$  și oricare ar fi  $t \in [-1, 2]$ .
- Gazeta Matematică – nr.9/2012**
3. Se consideră un triunghi  $ABC$  și  $M$  un punct interior. Notăm cu  $G_A$ ,  $G_B$ , respectiv  $G_C$  centrele de greutate ale triunghiurilor  $\triangle MBC$ ,  $\triangle MAC$  și, respectiv  $\triangle MAB$ .  
a) Demonstrați că triunghiurile  $\triangle ABC$  și  $\triangle G_A G_B G_C$  sunt asemenea;  
b) Demonstrați că triunghiurile  $\triangle ABC$  și  $\triangle G_A G_B G_C$  au același centru de greutate, dacă și numai dacă  $M$  este centrul de greutate al triunghiului  $\triangle ABC$ .
4. a) Fie  $x, y \in \mathbb{R}$  astfel încât  $|x - y| < \frac{1}{n}$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Demonstrați că  $x = y$ .  
b) Considerăm  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  o progresie aritmetică cu termenii strict pozitivi și rația nenulă. Fie  $x, y \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $[xa_n] = [ya_n]$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ . Demonstrați că  $x = y$ . (cu  $[z]$  s-a notat partea întreagă a numărului real  $z$ )

## NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică  
Etapa locală - 16 februarie 2013

## Clasa a X-a

1. Determinați toate soluțiile reale ale următoarelor ecuații:

a)  $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt{x+1} = 2;$

b)  $\frac{x^2+1}{x} = 2^{x(2-x)}.$

2. Fie  $a, b, c \in (0, 1)$  și  $x, y, z \in (0, \infty)$  astfel încât  $a = (bc)^x$ ,  $b = (ca)^y$  și  $c = (ab)^z$ . Demonstrați că:

a)  $x, y, z > 0;$

b)  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} = 2;$

c)  $\frac{1}{x+y+2} + \frac{1}{y+z+2} + \frac{1}{z+x+2} \leq 1.$

3. Fie  $a, b, c \in \mathbb{C}$  distincte, astfel încât  $(a+b)^3 = (b+c)^3 = (c+a)^3$ . Demonstrați că  $a^3 = b^3 = c^3$ .*Gazeta Matematică – nr.9/2012*4. Fie  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție care îndeplinește condițiile:

i)  $f(x)f(y) = f(x+y) + f(x-y)$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{Z}$ ;

ii)  $f(0) \neq 0$  și  $f(1) = \frac{5}{2}$ .

a) Demonstrați că funcția  $f$  este pară;b) Determinați funcția  $f$ .

## NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

**Olimpiada de matematică**  
**Etapă locală - 16 februarie 2013**

**Clasa a XI-a**

1. Pentru orice  $x, y \in [0, \infty)$  considerăm determinantul  $\Delta(x, y) = \begin{vmatrix} x & y & y \\ y & x & y \\ y & y & x \end{vmatrix}$ .
- a) Demonstrați că  $\Delta(x, y) \geq 0$  pentru orice  $x, y \in [0, \infty)$ ;
- b) Calculați  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\Delta(x, 1)}{\ln(x^3 - 3x + 3)}$ .
2. a) Dați exemplu de două șiruri de numere reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$ , dar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .
- b) Dați exemplu de două șiruri de numere reale  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  astfel încât  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 2$ , dar  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  și  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$  nu există.
3. a) Fie  $X \in M_2(\mathbb{C})$ . Demonstrați că  $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  există  $a_n, b_n \in \mathbb{C}$  astfel încât  $X^n = a_n X + b_n I_2$ ;
- b) Fie matricele  $A, B \in M_2(\mathbb{C})$  astfel încât  $AB - BA = A$ . Demonstrați că  $A^2 = O_2$  și  $AB^n A = O_2$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Gazeta Matematică – nr.11/2012**
4. Considerăm numerele reale  $a, b > 0$ . Definim șirurile  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  și  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  prin relațiile:
- $$a_0 = a, b_0 = b, a_{n+1} = \frac{a_n + \sqrt{a_n b_n}}{2}, b_{n+1} = \frac{b_n + \sqrt{a_n b_n}}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$
- a) Demonstrați că șirurile sunt convergente și au aceeași limită;
- b) Calculați limita celor două șiruri.

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.

Olimpiada de matematică  
Etapa locală - 16 februarie 2013

## Clasa a XII-a

1. Fie  $a \in \mathbb{R}$  și legea de compoziție " $\circ$ " definită pe  $\mathbb{R}$  prin relația  $x \circ y = xy - ax - ay + a^2 + a$ , pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ .
- a) Demonstrați că  $(\mathbb{R}, \circ)$  este monoid comutativ;
- b) Determinați numerele reale  $x$  cu proprietatea  $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 2013 ori de } x} = x$ .
2. a) Calculați  $\int \frac{\sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + \cos x} dx$ , pentru  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ;
- b) Calculați  $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+e^x} dx$ .
3. Fie  $(G, \cdot)$  un grup finit comutativ și notăm cu  $e$  elementul său neutru. Fie  $M = \{x \in G \mid x^2 = e\}$ .
- a) Demonstrați că  $M$  reprezintă un subgrup a grupului  $(G, \cdot)$ ;
- b) Arătați că  $\prod_{x \in G} x = \prod_{x \in M} x$ ;
- c) Spunem că un element  $a \in G$  are proprietatea „A”, dacă există un subgrup  $H$  a lui  $(G, \cdot)$  astfel încât  $\prod_{x \in H} x = a$ .
- Demonstrați că mulțimea  $\{a \in G \mid a \text{ are proprietatea "A"}\}$  este subgrup a grupului  $(G, \cdot)$ .
- Gazeta Matematică – nr.9/2012 (enunț modificat)**
4. Fie funcțiile  $f : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$  și  $g : [0, 1] \rightarrow (0, \infty)$  integrabile. Definim șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  prin  $a_n = \int_0^1 f^n(x) g(x) dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- a) Dacă  $f$  este continuă, demonstrați că șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  este convergent, dacă și numai dacă  $f(x) \leq 1$ ;
- b) Demonstrați că există  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

## NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.